Zur Differentialgeometrie der komplexen analytischen Flächen.

Inaugural-Dissertation

der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät der Kaiser-Wilhelms-Universität Straßburg zur Erlangung der Doktorwürde

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

vorgelegt von

Fritz Engel.

Borna-Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1914.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

§ 1. Von den analytischen Geraden und Ebenen 3

§ 2. Einteilung der analytischen Kurven 7

§ 3. Die Gleichungen der Kurven 10

§ 4. Die analytischen Flächen 13

§ 5. Die Gleichungen der Flächen, für welche $D \equiv D' \equiv D'' \equiv 0$ . . 18

§ 6. Die Gleichungen der Flächen, für welche $D \equiv D' \equiv 0$, $D'' \not\equiv 0$. 24

§ 7. Abhängigkeit der Größen E, F, G und D, D′, D″ voneinander . . 28

§ 8. Die Flächen, für welche $EG - F^2 \equiv 0$ 31

Anhang: Die Mongeschen Gleichungen der Minimalflächen 33

Einleitung.

Die Differentialgeometrie beschäftigt sich ursprünglich nur mit reellen Kurven und Flächen.

Versteht man unter

$$x(t),\ y(t),\ z(t)$$

drei reelle Funktionen, die für einen bestimmten reellen Variationsbereich von t endlich und stetig sind, so ist durch die Gleichungen

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{1}$$

eine reelle Kurve dargestellt. Man muß nun im allgemeinen die Voraussetzung hinzufügen, daß auch die Ableitungen der x, y, z bis mindestens zur dritten Ordnung endlich und stetig sind.

Läßt man jetzt aber für x, y, z allgemein analytische Funktionen zu, das sind komplexe Funktionen, welche in jedem Punkte des betrachteten Bereiches nach dem Taylorschen Satze entwickelt werden können, so ist durch die Gleichungen (1) eine zweifache Mannigfaltigkeit dargestellt, die man als analytische Kurve bezeichnet.

Es ist nun festzustellen, inwieweit die in der Theorie der reellen Kurven gebräuchlichen Methoden auf die analytischen Kurven anwendbar sind bezw. welche derselben einer gesonderten Behandlung bedürfen.[1])

Das Analoge gilt von den Flächen. Eine analytische Fläche ist definiert durch drei Gleichungen

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \tag{2}$$

wenn von den analytischen Funktionen x, y, z mindestens zwei voneinander unabhängig sind.

---

[1]) Man sehe hierüber die Abhandlung von Prof. Study (Bonn) „Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven“: Transactions of the American Mathematical Society 10.

Wir haben also zu untersuchen, inwieweit die Grundbegriffe der Theorie der reellen Kurven und Flächen für die entsprechenden analytischen Gebilde ihre Bedeutung behalten und für welche derselben sie bedeutungslos werden. Danach stellen wir die allgemeinsten Gleichungen dieser „singulären“ Kurven und Flächen auf.

Bei den bezüglichen Untersuchungen über die Flächen ergeben sich auch die allgemeinsten Gleichungen der in die Ebene abwickelbaren Flächen, die Mongeschen Gleichungen der Minimalflächen sowie die Gleichungen einer Klasse von Flächen, für welche die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte das konstante Verhältnis $-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ bilden.

Wir schicken einige Bemerkungen über die analytischen Geraden und Ebenen voraus.

§ 1.

Von den analytischen Geraden und Ebenen.

Eine analytische Gerade sei dargestellt durch die Gleichungen

$$x = at + a_1,\ y = bt + b_1,\ z = ct + c_1, \qquad (3)$$

wo die a, a_1, b, b_1, c, c_1 komplexe Konstante sind. Das Linienelement ist

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, dt.$$

Wenn $a^2 + b^2 + c^2$ identisch Null ist (ohne daß $a \equiv b \equiv c \equiv 0$), so heißt die Gerade Minimalgerade. Ist dagegen $a^2 + b^2 + c^2$ von Null verschieden, so entnimmt man von den reellen Geraden den Begriff der Richtungskosinus und bezeichnet als solche die Ausdrücke

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Die zugehörigen Winkel erhält man aus der Beziehung

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}\left(= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right).$$

Eine zweite Richtung sei gegeben durch die Kosinus ξ, η, ζ; dann definiert man den Winkel zwischen beiden Richtungen durch

$$\cos\omega = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,$$
$$= \alpha\xi + \beta\eta + \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)(1 - \xi^2 - \eta^2)}.$$

Es gibt demnach ∞^2 analytische Gerade, welche eine feste Gerade in einem gegebenen Punkte unter konstantem Winkel ω schneiden, auch wenn dieser Winkel gleich Null ist. Im letzteren Falle ist $\cos\omega = 1$, somit

$$\alpha\xi + \beta\eta - 1 = -\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)(1 - \xi^2 - \eta^2)};$$

daraus bestimmt man

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha\frac{1-\beta\eta}{1-\beta^2} \pm i\gamma\frac{\eta-\beta}{1-\beta^2}, \\ \zeta &= \gamma\frac{1-\beta\eta}{1-\beta^2} \mp i\alpha\frac{\eta-\beta}{1-\beta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wenn also α, β, γ reell sind, so können ξ, η, ζ nur reell sein für

$$\xi = \alpha,\ \eta = \beta,\ \zeta = \gamma,$$

denn damit die imaginären Teile von ξ und ζ fortfallen, muß η gleich β sein.

Somit fallen zwei reelle Gerade, die sich unter dem Winkel Null schneiden, zusammen, während dies durchaus nicht der Fall zu sein braucht für zwei analytische Gerade.

Als Ort aller Geraden, welche die Gerade (3) im Punkte (a_1, b_1, c_1) unter dem Winkel Null schneiden, ergibt sich die analytische Fläche

$$\left.\begin{aligned} x &= \left\{\frac{\alpha}{1-\beta^2}(1-\beta\eta) + \frac{i\gamma}{1-\beta^2}(\eta-\beta)\right\}v + a_1, \\ y &= \eta\cdot v + b_1 \\ z &= \left\{\frac{\gamma}{1-\beta^2}(1-\beta\eta) - \frac{i\alpha}{1-\beta^2}(\eta-\beta)\right\}v + c_1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und durch Elimination von η und v erhält man eine Gleichung von der Form

$$z = Ax + i\sqrt{1+A^2}\,y + \text{const},$$

wobei A eine Konstante ist.

Setzt man $x = u$, $y = v$, so ergibt sich

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial y}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial u} = A,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial v} = 1,\ \frac{\partial z}{\partial v} = i\sqrt{1+A^2},$$

somit

$$E = 1 + A^2,\ F = iA\sqrt{1+A^2},\ G = -A^2.$$

Da hiernach das Flächenelement $\left(\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\right)$ der durch (5) dargestellten Ebene Null ist, bezeichnet man dieselbe als Minimalebene.

Zwei beliebige jener ∞^2 Geraden, welche die Gerade (3) im Punkte (a_1, b_1, c_1) unter dem Winkel Null schneiden, haben nach (4) die Richtungskosinus

$$\xi = \alpha \frac{1-\beta\eta}{1-\beta^2} \pm i\gamma \frac{\eta-\beta}{1-\beta^2},$$

η,

$$\zeta = \gamma \frac{1-\beta\eta}{1-\beta^2} \mp i\alpha \frac{\eta-\beta}{1-\beta^2}$$

und

$$\xi_1 = \alpha \frac{1-\beta\eta_1}{1-\beta^2} \pm i\gamma \frac{\eta_1-\beta}{1-\beta^2},$$

η_1

$$\zeta_1 = \gamma \frac{1-\beta\eta_1}{1-\beta^2} \mp i\alpha \frac{\eta_1-\beta}{1-\beta^2}.$$

Da nun, wie man leicht zeigt,

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 1,$$

schneiden sich die ∞^2 Geraden auch untereinander unter dem Winkel Null.

Die durch eine Gleichung von der Form

$$(x - a_1)a + (y - b_1)b + (z - c_1)c = 0$$

dargestellte vierfache Mannigfaltigkeit heißt eine Ebene. Es sei wieder $a^2 + b^2 + c^2$ von Null verschieden, dann erhält man als Richtungskosinus der Normalen der Ebene die Größen

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Die Richtungskosinus der Normalen einer zweiten Ebene seien ξ, η, ζ, dann ist der Winkel zwischen beiden Ebenen definiert durch

$$\cos\omega = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,$$

demnach gibt es auch ∞^2 Ebenen, welche durch den Punkt (a_1, b_1, c_1) gehen und die Ebene (6) unter dem Winkel Null schneiden. Zwei derselben mögen die Richtungskosinus α, β, γ und ξ, η, ζ

haben, dann sind die Richtungskosinus der Schnittgerade proportional den Größen

$$\left|\begin{matrix}\beta\gamma\\ \eta\zeta\end{matrix}\right|,\quad \left|\begin{matrix}\gamma\alpha\\ \zeta\xi\end{matrix}\right|,\quad \left|\begin{matrix}\alpha\beta\\ \xi\eta\end{matrix}\right|.$$

Die Summe der Quadrate derselben ist

$$\left|\begin{matrix}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta\\ \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta & \xi^2+\eta^2+\zeta^2\end{matrix}\right|,$$

verschwindet also identisch, d. h. wenn zwei Ebenen sich unter dem Winkel Null schneiden, so ist die Schnittlinie Minimalgerade, und wenn umgekehrt zwei Ebenen sich in einer Minimalgeraden schneiden, so ist der Winkel zwischen den Ebenen Null.

Die Gesamtheit der durch (a_1, b_1, c_1) gehenden Ebenen, die die Ebene (6) unter dem Winkel Null schneiden, ist dargestellt durch

$$(x-a_1)\left\{\alpha\frac{1-\beta\eta}{1-\beta^2}+i\gamma\frac{\eta-\beta}{1-\beta^2}\right\}+(y-b_1)\eta$$
$$+(z-c_1)\left\{\gamma\frac{1-\beta\eta}{1-\beta^2}-i\alpha\frac{\eta-\beta}{1-\beta^2}\right\}=0.$$

Als Einhüllende erhält man durch Differentiation nach η die Minimalebene

$$(x-a_1)\frac{-\alpha\beta+i\gamma}{1-\beta^2}+(y-b_1)+(z-c_1)\frac{-\beta\gamma-i\alpha}{1-\beta^2}=0.$$

Dieselbe ist identisch mit der Minimalebene (5).

Wenn durch die Gleichungen

$$x=at+a_1,\ y=bt+b_1,\ z=ct+c_1$$

eine Minimalgerade definiert ist, d. h. wenn $a^2+b^2+c^2$ identisch Null ist, so bezeichnet man die Größen a, b, c als Richtungskoeffizienten.

Die Richtungskoeffizienten einer zweiten Minimalgerade seien ξ, η, ζ.

Wenn die Richtungskosinus α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ zweier Geraden, die nicht Minimalgerade sind, der Gleichung

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0$$

genügen, so stehen die Gerade aufeinander senkrecht. Es ist festzustellen, welches hier die Bedeutung der entsprechenden Gleichung

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0$$

ist. Sie nimmt, da

$$c = i\sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } \zeta = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

die Form an

$$a\xi + b\eta = \sqrt{(a^2 + b^2)(\xi^2 + \eta^2)},$$

liefert also

$$(a\eta - b\xi)^2 = 0,$$

somit

$$\frac{a}{\xi} = \frac{b}{\eta} = \frac{c}{\zeta}.$$

Wenn demnach zwei Minimalgerade gegeben sind durch die Gleichungen

$$x = \alpha t + a_1,\ y = \beta t + b_1,\ z = \gamma t + c_1$$

bezw.

$$x = \alpha_1 t + a_1,\ y = \beta_1 t + b_1,\ z = \gamma_1 t + c_1$$

und es besteht die Gleichung

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$$

so fallen beide zusammen.

§ 2.

Einteilung der analytischen Kurven.

Die Funktionen

$$x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)$$

seien analytische; fassen wir dann x_1, x_2, x_3 als laufende Koordinaten eines Punktes auf, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so ist durch die Gleichungen

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t)$$

eine analytische Kurve definiert.

Die Ableitungen der x bezeichnen wir mit x', x'', x''' ... und setzen

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \Sigma x'^2,$$
$$x_1' x_1'' + x_2' x_2'' + x_3' x_3'' = \Sigma x' x'',$$
$$x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 = \Sigma x''^2,$$
$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = (x' x'' x''').$$

Eine reelle Kurve ist dann bis auf ihre Lage im Raume bestimmt durch die Krümmung

$$K = \frac{\{\Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x' x'')^2\}^{\frac{1}{2}}}{\{\Sigma x'^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

und die Torsion

$$T = \frac{(x' x'' x''')}{\Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x' x'')^2},$$

vorausgesetzt, daß der Parameter t als bestimmte Funktion des Bogens gegeben ist. Die Kurve ist also bestimmt durch die drei Ausdrücke

$$P = \Sigma x'^2,$$
$$Q = \Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x' x'')^2,$$
$$R = (x' x'' x''').$$

Dieselben sind einer Bewegung im Raume gegenüber Invarianten; bei einer Parametertransformation $t = t(t_1)$ nehmen sie entsprechend ihrem Gewichte eine Potenz von $\frac{dt}{dt_1}$ als Faktor an; man bezeichnet sie als differentielle Semiinvarianten.

Die Differentialgeometrie der reellen Kurven läßt sich nun ohne weiteres übertragen auf diejenigen analytischen Kurven, für welche Krümmung und Torsion bestimmte Werte haben, dagegen nicht auf diejenigen, für welche K und T ihre Bedeutung verlieren dadurch, daß P oder Q identisch Null wird. Wir stellen fest, inwieweit es derartige Kurven gibt und benutzen dabei mit Vorteil die dritte Größe R.

Da $2\Sigma x' x''$ die Ableitung von $\Sigma x'^2$ ist, so hat $P \equiv 0$ stets zur Folge $Q \equiv 0$.

Ferner findet man

$$R^2 = (x' x'' x''')^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x' x'' & \Sigma x' x''' \\ \Sigma x' x'' & \Sigma x''^2 & \Sigma x'' x''' \\ \Sigma x' x''' & \Sigma x'' x''' & \Sigma x'''^2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man hierin

$$Q \equiv \Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x' x'')^2 \equiv 0,$$

so ergibt sich nach geringen Umformungen

$$R^2 = -\frac{1}{P}\{\Sigma x'^2 \Sigma x'' x''' - \Sigma x' x'' \Sigma x' x'''\}^2,$$

und da der Inhalt der geschweiften Klammer die halbe Ableitung von Q ist, folgt, wenn P von Null verschieden ist, aus $Q \equiv 0$ stets $R \equiv 0$.

Setzt man hingegen in obigem Wert von R^2

$$\Sigma x'^2 \equiv 0$$

und deshalb auch

$$\Sigma x' x'' \equiv 0,$$

so erhält man

$$R^2 = -\Sigma x''^2 (\Sigma x' x''')^2.$$

Nun ist aber

$$\frac{d}{dt}(\Sigma x' x'') = \Sigma x''^2 + \Sigma x' x''',$$

also für $\Sigma x' x'' \equiv 0$

$$\Sigma x' x''' = -\Sigma x''^2,$$

daher wird

$$R^2 = -\{\Sigma x''^2\}^3.$$

Wir haben demnach die Kurven wie folgt einzuteilen:

I. $Q \not\equiv 0$:

1. $Q \not\equiv 0$, $R \not\equiv 0$,
2. $Q \not\equiv 0$, $R \equiv 0$,
3. $Q \equiv 0$, $R \equiv 0$,

II. $P = 0$, $Q \equiv 0$:

4. $\Sigma x''^2 \not\equiv 0$,
5. $\Sigma x''^2 \equiv 0$.

§ 3.
Die Gleichungen der Kurven.

Für die Kurven 1 sind die Krümmung und Torsion bestimmte, von Null verschiedene Ausdrücke; es sind dies also Kurven doppelter Krümmung. Auf sie läßt sich ohne weiteres die Theorie der reellen Kurven anwenden. Nur für singuläre Punkte kann einer oder mehrere der Ausdrücke P, Q, R verschwinden.

Zur Aufstellung der Gleichungen für die Kurven 2 und 3 gehen wir aus von dem Verschwinden der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix}.$$

Dieselbe wird einmal identisch Null, wenn die Elemente der beiden ersten Horizontalreihen einander proportional sind, also

$$\frac{x_1''}{x_1'} = \frac{x_2''}{x_2'} = \frac{x_3''}{x_3'} = \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)},$$

wo φ'' und φ' die zweite bezw. erste Ableitung einer willkürlichen Funktion φ von t sein mögen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\frac{d(l\,x')}{dt} = \frac{d(l\,x_2')}{dt} = \frac{d(l\,x_3')}{dt} = \frac{d(l\,\varphi')}{dt},$$

somit

$$l\,x_1' = l\,\varphi' + l\,a = l(a\cdot\varphi'),$$
$$x_1 = a\cdot\varphi(t) + a_1;$$

entsprechend

$$x_2 = b\cdot\varphi(t) + b_1,\ x_3 = c\cdot\varphi(t) + c_1,$$

es liegt also eine Gerade vor.

Sehen wir von diesem Falle ab, so können wir, wenn unter a, b, c eine Permutationsform von 1, 2, 3 verstanden ist, unbeschadet der Allgemeinheit $x_a' x_b'' - x_b' x_a''$ von Null verschieden annehmen; dann aber gibt es zwei Funktionen A und B von t derart, daß

$$\left.\begin{aligned} x_c' &= A x_a' + B x_b', \\ x_c'' &= A x_a'' + B x_b'', \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

somit

$$x_c''' = A x_a''' + B x_b''' + A' x_a'' + B' x_b''.$$

Durch Einsetzen dieser Werte nimmt der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} x_a' & x_b' & x_c' \\ x_a'' & x_b'' & x_c'' \\ x_a''' & x_b''' & x_c''' \end{vmatrix}$$

die Form von

$$\begin{vmatrix} x_a' & x_b' \\ x_a'' & x_b'' \end{vmatrix} (A' x_a'' + B' x_b''),$$

verschwindet also nur für

$$A' x_a'' + B' x_b'' = 0. \tag{9}$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (8) und Vergleichen mit der zweiten ergibt sich ferner

$$A' x_a' + B' x_b' = 0,$$

folglich sind A und B konstant, und es wird

$$x_c = A x_a + B x_b + \text{const}, \tag{10}$$

d. h. alle Kurven, für welche R identisch Null ist, sind eben.

Nach (8) ist

$$\begin{aligned} x_c' &= A x_a' + B x_b', \\ x_c'' &= A x_a'' + B x_b'', \end{aligned}$$

daher

$$\Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x' x'')^2 = (1 + A^2 + B^2) \begin{vmatrix} x_a' & x_b' \\ x_a'' & x_b'' \end{vmatrix};$$

soll demnach mit R auch Q verschwinden, so muß entweder $(x_a' x_b'' - x_b' x_a'')$ oder $1 + A^2 + B^2$ identisch Null sein, d. h. es

ist Q identisch Null außer für die Geraden und die Minimallinien auch für diejenigen krummen Linien, welche in der Ebene

$$x_c = A x_a + i\sqrt{1 + A^2}\, x_b + \text{const}$$

liegen. Dies ist eine Minimalebene. (Für eine spezielle Lage ist ihre Gleichung $x_a = i x_b + \text{const.}$)

Während die Kurven 1 und 2 in jedem Punkte je eine bestimmte Gerade als Tangente, Haupt- und Binormale haben, sind für die Gerade die Richtungskosinus der Normalen unbestimmt. Für die krummen Linien in Minimalebenen sind beide Normalen (wenn man diesen Begriff beibehalten will) Minimalgerade und fallen nach dem letzten Satze in § 1 zusammen.

Die Kurven 4 und 5 bezeichnet man, da ihr Linienelement $(\sqrt{P}\,dt)$ identisch Null ist, als Minimallinien; für sie ist offenbar

$$x_c' = i\sqrt{x_a'^2 + x_b'^2},$$
$$x_c = i\int \sqrt{x_a'^2 + x_b'^2}\, dt.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$x_c'' = i\,\frac{x_a' x_a'' + x_b' x_b''}{\sqrt{x_a'^2 + x_b'^2}},$$

somit

$$Z x''_c = \frac{\begin{vmatrix} x_a' & x_b' \\ x_a'' & x_b'' \end{vmatrix}^2}{x_a'^2 + x_b'^2}.$$

Für die Kurven 5 ist daher, wenn a eine Konstante bedeutet,

$$x_b = a x_a + \text{const},$$
$$x_c = i\sqrt{1 + a^2}\, x_a + \text{const}.$$

Für die Minimallinien sind die Tangente und die Normalen Minimalgerade und fallen alle drei zusammen.

Jede Kurve 1 oder 2 ist bis auf ihre Lage im Raume bestimmt durch die drei Größen P, Q, R, denn da $P = \Sigma x'^2$ von Null verschieden ist, kann man den Bogen s als Parameter einführen, dann wird

$$P = 1,$$

und für Krümmung und Torsion ergibt sich

$$K = \sqrt{Q},\ P = \frac{R}{Q}.$$

Die betreffende Kurve läßt sich dann eindeutig bestimmen aus den Frenettschen Gleichungen.

Alle Gerade und auch alle Minimalgerade sind unter sich äquivalent, d. h. man kann jede mit jeder zur Deckung bringen.

Über die Erledigung des Äquivalenzproblems für die krummen Linien in Minimalebenen und die krummen Minimallinien sehe man die in der Einleitung erwähnte Abhandlung von Prof. Study.

§ 4.

Die analytischen Flächen.

Die Funktionen

$$x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v)$$

seien analytische, und unter ihnen seien mindestens zwei voneinander unabhängig, dann ist durch die Gleichungen

$$x_1 = x_1(u, v),\ x_2 = x_2(u, v),\ x_3 = x_3(u, v)$$

eine analytische Fläche dargestellt.

Man bezeichnet als Fundamentalgrößen erster Ordnung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} E &= \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}, \\ G &= \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

und als erste Grundform die binäre quadratische Form

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Die Diskriminante derselben $(EG - F^2)$ ist Invariante; bei einer Parametertransformation $u = u(u_1, v_1)$, $v = v(u_1, v_1)$ nimmt sie den Faktor $\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2$ an. Derselbe muß von Null verschieden sein, da andernfalls die Funktionen u und v von-

einander abhängig sind und deshalb die Gleichungen (11) nach der Transformation nur noch eine Kurve darstellen.

Wir führen ferner (nach Gauß) die Größen ein:

$$D = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$D' = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right),\quad D'' = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Ebenso wie $EG - F^2$ ist auch $DD'' - D'^2$ Invariante und nimmt bei der Parametertransformation den Faktor $\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^4$ an.

(Aus D, D', D'' ergeben sich die sogen. Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N durch Division mit $\sqrt{EG - F^2}$.)

Für eine reelle Fläche kann $EG - F^2$ nicht identisch Null sein; wenn dann $DD'' - D'^2$ identisch Null ist, so ist die Krümmung

$$\frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^2}$$

Null, und die betreffende Fläche ist in die Ebene abwickelbar bezw. ist selbst eine Ebene, wenn

$$D \equiv D' \equiv D'' \equiv 0.$$

Wie nun schon die abwickelbaren Flächen von gewissen Untersuchungen auszuschließen sind, so erfordern erst recht diejenigen analytischen Flächen eine gesonderte Behandlung, für welche $EG - F^2$ identisch Null ist. Wir stellen fest, inwieweit es derartige Flächen gibt.

Das Linienelement der Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ auf der Fläche ist gegeben durch

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

demnach besitzt jede Fläche, für welche $EG - F^2$ von Null verschieden ist, zwei Scharen von Minimallinien (da die Differential-

gleichung $ds^2 = 0$ zwei Lösungen hat), und wenn man die Fläche auf ihre Minimallinien bezieht, so wird $E \equiv G \equiv 0$.

Ferner besagt $F \equiv 0$, daß die Parameterkurven aufeinander senkrecht stehen, es gibt also unendlich viele Transformationen, durch welche F verschwindet.

Führt man nun vermittels

$$u = u(u_1, v_1), \quad v = v(u_1, v_1)$$

die neuen Parameter u_1, v_1 ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= E\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2, \\ F_1 &= E\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1} + F\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1}\right) + G\frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}, \\ G_1 &= E\left(\frac{\partial u}{\partial v_1}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} + G\left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2, \end{aligned}\right\}$$

und für

$$EG - F^2 \equiv 0$$

gehen diese Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \left(\sqrt{E}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2, \\ F_1 &= \left(\sqrt{E}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)\left(\sqrt{E}\frac{\partial u}{\partial v_1} + \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial v_1}\right), \\ G_1 &= \left(\sqrt{E}\frac{\partial u}{\partial v_1} + \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2. \end{aligned}\right\}$$

Wenn man somit jetzt E_1 zum Verschwinden bringt, so wird zugleich F_1 Null, denn es ist $F_1^2 = E_1 \cdot G_1$.

Die Gleichungen

$$\sqrt{E_1} = \sqrt{E}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial u_1} = 0,$$

$$\sqrt{G_1} = \sqrt{E}\frac{\partial u}{\partial v_1} + \sqrt{G}\frac{\partial v}{\partial v_1} = 0$$

können, da $\dfrac{\partial u}{\partial u_1}\dfrac{\partial v}{\partial v_1} - \dfrac{\partial u}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial u_1}$ von Null verschieden ist, nicht zugleich bestehen, es sei denn

$$E \equiv F \equiv G \equiv 0,$$

dann aber gibt es keine Transformation, durch welche eine dieser Größen von Null verschieden würde. Im letzteren Falle wäre jede Kurve auf der Fläche Minimallinie. Wir hatten aber gefunden, daß wenn die Richtungskoeffizienten α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 zweier durch einen Punkt gehenden Minimallinien der Gleichung

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 \equiv 0$$

genügen, die beiden Minimallinien zusammenfallen. Wenn demnach eine Fläche zwei verschiedene Scharen von Minimallinien besitzt und ist auf dieselben bezogen ($E \equiv G \equiv 0$), so kann nicht auch F identisch Null sein; besitzt sie aber nur eine Schar von Minimallinien und sind dies die Kurven $v = \text{const}$, so ist $E \equiv 0$, aber G muß von Null verschieden sein. Es gibt also keine Fläche, für welche

$$E \equiv F \equiv G \equiv 0,$$

dasselbe wird sich bei der Aufstellung der Gleichungen für die einzelnen Flächen bestätigen.

Wir zeigen nun zuerst, daß

$$EG - F^2 \equiv 0$$

stets zur Folge hat

$$DD'' - D'^2 \equiv 0.$$

Es ist

$$DD'' - D'^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \Sigma \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right)^2 \right\} (EG - F^2)$$

$$+ E \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} \right\}$$

$$+ F \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} \right\}$$

$$+ G \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{4} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{4} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} \right\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet identisch für

$$E \equiv F \equiv 0,$$

somit, da sowohl $EG - F^2$ als auch $DD'' - D'^2$ Invariante ist, allgemein für

$$EG - F^2 \equiv 0.$$

Dasselbe läßt sich auch direkt zeigen, indem man einsetzt

$$F = \sqrt{EG},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{E \frac{\partial G}{\partial u} + G \frac{\partial E}{\partial u}}{2\sqrt{EG}}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{E \frac{\partial G}{\partial v} + G \frac{\partial E}{\partial v}}{2\sqrt{EG}}.$$

Somit haben die Flächen, welche nur eine Schar von Minimallinien besitzen (soweit sie nicht Ebenen sind), auch nur eine Schar von Haupttangentenkurven, und zwar fallen dieselben mit den Minimallinien zusammen, denn es ist

$$D^2 = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} \Sigma \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)^2 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix},$$

$$= (EG - F^2) \Sigma \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)^2 + F \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial E}{\partial v}$$

$$- E \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 - E \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{4} E \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{4} G \left(\frac{\partial E}{\partial u} \right)^2,$$

$$D'^2 = (EG - F^2) \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} \right)^2$$
$$+ \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{4} E \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{4} G \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2.$$

so daß aus $E \equiv F \equiv 0$ folgt

$$D \equiv D' \equiv 0.$$

Denken wir uns nun jede Fläche auf die eine Schar von Haupttangentenkurven ($v = \text{const}$) und eine beliebige Schar anderer Kurven bezogen, so können wir als Einteilung der analytischen Flächen die folgende angeben:

I. $EG - F^2 \not\equiv 0$:
1. $DD'' - D'^2 \not\equiv 0$,
2. $D \equiv D' \equiv 0$, $D'' \not\equiv 0$,
3. $D \equiv D' = D'' \equiv 0$,

II. $E \equiv F \equiv 0$, $G \not\equiv 0$:
4. $D \equiv D' \equiv 0$, $D'' \not\equiv 0$
5. $D \equiv D' \equiv D'' \equiv 0$.

§ 5.

Die Gleichungen der Flächen, für welche $D \equiv D' \equiv D'' \equiv 0$.

a, b, c sei eine Permutationsform von 1, 2, 3. Da nach Voraussetzung unter den Funktionen x_1, x_2, x_3 mindestens zwei voneinander unabhängig sind, können wir unbeschadet der Allgemeinheit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_a}{\partial v} \\ \frac{\partial x_b}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden annehmen (es sind also x_a und x_b von-

einander unabhängig). Dann aber gibt es zwei Funktionen A und B von u und v derart, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_c}{\partial u} &= A\frac{\partial x_a}{\partial u} + B\frac{\partial x_b}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_c}{\partial v} &= A\frac{\partial x_a}{\partial v} + B\frac{\partial x_b}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man

$$\left.\begin{aligned} \pm D &= -\left(A\frac{\partial^2 x_a}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 x_b}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 x_c}{\partial u^2}\right)\begin{vmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ \pm D' &= -\left(A\frac{\partial^2 x_a}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2 x_b}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 x_c}{\partial u\,\partial v}\right)\begin{vmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ \pm D'' &= -\left(A\frac{\partial^2 x_a}{\partial v^2} + B\frac{\partial^2 x_b}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 x_c}{\partial v^2}\right)\begin{vmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(Das Vorzeichen von D, D′, D″ hängt ab von der Klasse der Permutationsform a, b, c.) Die Ausdrücke (14) werden nun nur identisch gleich Null für

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_c}{\partial u^2} &= A\frac{\partial^2 x_a}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 x_b}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial^2 x_c}{\partial u\,\partial v} &= A\frac{\partial^2 x_a}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2 x_b}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial^2 x_c}{\partial v^2} &= A\frac{\partial^2 x_a}{\partial v^2} + B\frac{\partial^2 x_b}{\partial v^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (13) und Vergleichen mit (15) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial u}&=0,\\
\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial v}&=0,\\
\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x_a}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial x_b}{\partial u}&=0,\\
\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x_a}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial x_b}{\partial v}&=0.
\end{aligned}\right| \qquad (16)$$

Nach den ersten beiden dieser Gleichungen ist

$$\frac{\partial A}{du}=\frac{\partial B}{\partial u}\equiv 0,$$

nach den letzten beiden

$$\frac{\partial A}{\partial v}\equiv\frac{\partial B}{\partial v}\equiv 0,$$

somit sind A und B Konstante und es ergibt sich

$$x_c = A x_a + B x_b + \text{const.} \qquad \text{I}$$

Hiernach ist nun

$$E=\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2+\left(A\frac{\partial x_a}{\partial u}+B\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x_a}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial v}+\frac{\partial x_b}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial v}+\left(A\frac{\partial x_a}{\partial u}+B\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)\left(A\frac{\partial x_a}{\partial v}+B\frac{\partial x_b}{\partial v}\right).$$

Sollen also mit D, D′, D″ auch E und F Null werden, so muß sein:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial x_a}{\partial u}+B\frac{\partial x_b}{\partial u}&=i\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}\\
A\frac{\partial x_a}{\partial v}+B\frac{\partial x_b}{\partial v}&=i\,\frac{\frac{\partial x_a}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial v}+\frac{\partial x_b}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}}.
\end{aligned}\right| \qquad (17)$$

Man berechnet daraus

$$\left.\begin{aligned} A &= i\,\frac{\frac{\partial x_a}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}}, \\ B &= i\,\frac{\frac{\partial x_b}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen findet man

$$\frac{\partial x_b}{\partial u} = i\,\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\,\frac{\partial x_a}{\partial u},$$

somit

$$x_b = i\,\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\,x_a + \varphi(v),$$

wobei φ willkürliche Funktion von v allein ist.

Aus (18) ergibt sich ferner, wenn man quadriert und addiert,

$$A^2+B^2+1=0,$$

es sind demnach die Gleichungen jeder Fläche, für welche

$$E \equiv F \equiv D \equiv D' \equiv D'' \equiv 0$$

ist, von der Form

$$x_a = x_a(u, v),\ x_b = i\,\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\,x_a + \varphi(v),$$

$$x_c = A\,x_a + i\sqrt{1+A_2}\,x_b + \text{const.} \qquad \text{II}$$

Dies sind die Gleichungen einer Minimalebene.

Aus ihnen erhält man

$$\frac{\partial x_b}{\partial v} = i\,\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\,\frac{\partial x_a}{\partial v} + \frac{d\varphi}{dv},$$

$$\frac{\partial x_c}{dv} = A\,\frac{\partial x_a}{\partial v} + i\sqrt{1+A^2}\,\frac{\partial x_b}{\partial v},$$

$$= -\frac{1}{A}\,\frac{\partial x_a}{\partial v} + i\sqrt{1+A^2}\,\frac{d\varphi}{dv},$$

somit

$$G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = - A^2 \left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2 .$$

Soll demnach mit E und F auch G verschwinden, so muß, da nach der zweiten Gleichung II A nicht Null sein kann, φ konstant sein. Dann aber ist durch die Gleichungen II keine Fläche mehr, sondern eine Kurve dargestellt. Es hat sich also bestätigt, daß es keine Fläche gibt, für welche $E \equiv F \equiv G \equiv 0$.

Wir hatten gefunden, daß der Ort der ∞^2 Geraden, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte unter dem Winkel Null schneiden, eine Minimalebene ist; umgekehrt läßt sich zeigen, daß jede Minimalebene aufgefaßt werden kann als Ort von ∞^2 Geraden, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte unter dem Winkel Null schneiden.

Die zu betrachtende Minimalebene habe die Gleichung

$$(x - a_1)\, a + (y - b_1) + (z - c_1)\, i\sqrt{1 + a^2} = 0 . \qquad (19)$$

Eine Gerade durch den Punkt (a_1, b_1, c_1) sei

$$\frac{x - a_1}{\alpha} = \frac{y - b_1}{\beta} = \frac{z - c_1}{\gamma} \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1) ,$$

dann ist nach (5) der Ort aller durch (a_1, b_1, c_1) gehenden Geraden, welche die gegebene Gerade unter dem Winkel Null schneiden, die Minimalebene

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-\alpha\beta + i\gamma}{1 - \beta^2}\, u + \frac{\alpha - i\beta\gamma}{1 - \beta^2}\, v + a_1 , \\ y &= u + b_1 , \\ z &= \frac{-\beta\gamma - i\alpha}{1 - \beta^2}\, u + \frac{\gamma + i\alpha\beta}{1 - \beta^2}\, v + c_1 . \end{aligned}\right\}$$

Durch Elimination von u und v erhält man

$$(x - a_1)\frac{i\gamma - \alpha\beta}{1 - \beta^2} + (y - b_1) + (z - c_1)\frac{-i\alpha - \beta\gamma}{1 - \beta^2} = 0 .$$

Soll dieselbe identisch sein mit der Minimalebene (19), so müssen sich die Werte α, β, γ so bestimmen lassen, daß

$$\frac{i\gamma - \alpha\beta}{1-\beta^2} = a\,, \quad \frac{-i\alpha - \beta\gamma}{1-\beta^2} = i\sqrt{1-a^2}\,;$$

hiernach aber entspricht jedem willkürlich gewählten Werte β ungleich ± 1 ein Wertsystem α, γ.

Wir hatten gezeigt, daß zwei durch einen Punkt gehende Minimalgerade, deren Richtungskoeffizienten α, β, γ bezw. $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind, zusammenfallen, wenn

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0\,.$$

Ebenso fallen auch die beiden Minimalebenen

$$(x-a)\,\alpha + (y-b)\,\beta + (z-c)\,\gamma = 0\,,$$
$$(x-a)\,\alpha_1 + (y-b)\,\beta_1 + (z-c)\,\gamma_1 = 0$$

zusammen, wenn die Bedingung

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0$$

erfüllt ist, denn dieselbe hat ja nach § 1 zur Folge

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}\,.$$

Zwei Ebenen, die nicht Minimalebenen sind, schneiden sich in einer Minimalgeraden, wenn sie miteinander den Winkel Null bilden.

Zwei Minimalebenen können sich nicht in einer Minimalgeraden schneiden, denn sind ihre Richtungskoeffizienten α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, so sind diejenigen der Schnittgeraden proportional den Größen

$$\begin{vmatrix} \beta\gamma \\ \beta_1\gamma_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \gamma\alpha \\ \gamma_1\alpha_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha\beta \\ \alpha_1\beta_1 \end{vmatrix}.$$

Die Summe der Quadrate derselben ist

$$\begin{vmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1 \\ \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1 & \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 \end{vmatrix},$$

und dieser Ausdruck wird, da

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

und

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 0\,,$$

nur Null für

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$$

d. i.

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1},$$

dann aber fallen die Minimalebenen, wenn sie einen Punkt gemeinsam haben, zusammen.

Durch jede Gerade gehen ∞^2 Ebenen, worunter zwei Minimalebenen. Dieselben fallen zusammen, wenn die Gerade Minimalgerade ist.

§ 6.

Die Gleichungen der Flächen, für welche $D \equiv D' \equiv 0$, $D'' \not\equiv 0$.

Wie im vorigen Abschnitt, nehmen wir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

von Null verschieden an und setzen

$$\frac{\partial x_c}{\partial u} = A\frac{\partial x_a}{\partial u} + B\frac{\partial x_b}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x_c}{\partial v} = A\frac{\partial x_a}{\partial v} + B\frac{\partial x_b}{\partial v}.$$

Wie dort, ergeben sich dann auch hier als Bedingungen dafür, daß D und D′ zugleich verschwinden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial x_a}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial x_b}{\partial u} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial B}{\partial u} = 0,$$

es sind also A und B Funktionen von v allein. Die dritte Gleichung (20) ergibt

$$\frac{\partial x_b}{\partial v} : \frac{\partial x_a}{\partial v} = -\frac{\partial A}{\partial u} : \frac{\partial B}{\partial u},$$

es ist also auch $\frac{\partial x_b}{\partial v} : \frac{\partial x_a}{\partial v}$ Funktion von v allein, etwa gleich $\varphi(v)$, dann erhält man:

$$x_b = x_a \cdot \varphi(v) + \psi(v), \tag{21}$$

wo φ und ψ willkürliche Funktionen von v allein sind.

Ferner ist

$$\frac{\partial A}{\partial v} : \frac{\partial B}{\partial v} = -\varphi(v),$$

$$A = -\int \varphi(v) \frac{dB}{dv} dv,$$

$$= -B(v) \cdot \varphi(v) + \int B(v) \frac{d\varphi}{dv} dv,$$

daher

$$\frac{\partial x_c}{\partial v} = A \frac{\partial x_a}{\partial v} + B \frac{\partial x_b}{\partial v},$$

$$= -B \cdot \varphi \frac{\partial x_a}{\partial v} + \frac{\partial x_a}{\partial v} \int B \frac{d\varphi}{dv} dv + B \frac{\partial x_b}{\partial v},$$

und da nach (21)

$$\frac{\partial x_b}{\partial v} = \varphi \frac{\partial x_a}{\partial v} + x_a \frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\psi}{dv},$$

ist:

$$\frac{\partial x_c}{\partial v} = B \cdot x_a \frac{d\varphi}{dv} + B \frac{d\psi}{dv} + \frac{\partial x_a}{\partial v} \int B \frac{d\varphi}{dv} dv. \tag{22}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial x_c}{\partial u} = A \frac{\partial x_a}{\partial u} + B \frac{\partial x_b}{\partial u},$$

$$= \frac{\partial x_a}{\partial u} \int B \frac{d\varphi}{dv} dv. \tag{23}$$

Durch Integration der Gleichungen (22) und (23) ergibt sich

$$x_c = x_a \int B \frac{d\varphi}{dv} dv + \int B \frac{d\psi}{dv} dv. \tag{24}$$

Demnach sind die Gleichungen jeder Fläche, für welche

$$D \equiv D' \equiv 0, \; D'' \not\equiv 0$$

von der Form

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_a(u, v), \; x_b = x_a \cdot \varphi(v) + \psi(v), \\ x_c &= x_a \int B(v) \frac{d\varphi}{dv} dv + \int B(v) \frac{d\psi}{dv} dv \end{aligned}\right\} \quad \text{III}$$

Für $\varphi(v) \equiv 0$ ergibt sich $y = \psi(v), z = \int B \frac{d\psi}{dv} dv$, also $z = f(y)$,

d. h. es liegt ein Zylinder vor, dessen Seitenlinien parallel der x_a-Achse sind.

Ist $\varphi(v)$ konstant, etwa gleich a, so ist

$$\psi(v) = x_b - a x_a,$$

und da man $B(v)$ als Funktion von $\psi(v)$ auffassen kann:

$$x_c = F(x_b - a x_a).$$

Durch diese Gleichung ist ein Zylinder dargestellt, dessen Seitenlinien parallel der $x_a - x_b$-Ebene sind.

Sieht man von diesen speziellen Fällen ab, so kann man ψ und B als Funktionen von φ auffassen und erhält durch Einführung einer beliebigen Funktion von u und v an Stelle von v die allgemeinsten Gleichungen der Flächen, für welche $DD'' - D'^2 \equiv 0$ ist, bezogen auf ein beliebiges System von Parameterkurven:

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_a(u, v), \; x_b = x_a \cdot \varphi(u, v) + \psi(\varphi), \\ x_c &= x_a \int B(\varphi) \, d\varphi + \int B(\varphi) \frac{d\psi}{d\varphi} d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \text{III}^*$$

Es ist nun festzustellen, welche spezielle Form die Gleichungen III annehmen müssen, damit mit D und D' auch E und F verschwinden.

Wir gehen wieder aus von

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_c}{\partial u} &= A\frac{\partial x_a}{\partial u} + B\frac{\partial x_b}{\partial u},\\ \frac{\partial x_c}{\partial v} &= A\frac{\partial x_a}{\partial v} + B\frac{\partial x_b}{\partial v}.\end{aligned}\right\}$$

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2 + \left(A\frac{\partial x_a}{\partial u} + B\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2,\\ F &= \frac{\partial x_a}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial v} + \frac{\partial x_b}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial v} + \left(A\frac{\partial x_a}{\partial u} + B\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)\left(A\frac{\partial x_a}{\partial v} + B\frac{\partial x_b}{\partial v}\right).\end{aligned}\right\}$$

Aus $E \equiv F \equiv 0$ berechnet man wie im vorigen Abschnitt (18)

$$\left.\begin{aligned}A &= i\,\frac{\frac{\partial x_a}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}},\\ B &= i\,\frac{\frac{\partial x_b}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}}.\end{aligned}\right\}$$

Nun ist aber nach (21)

$$\frac{\partial x_b}{\partial u} = \frac{\partial x_a}{\partial u}\cdot\varphi(v),$$

somit

$$A = \frac{i}{\sqrt{1+\varphi^2}},\quad B = \frac{i\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$$

und

$$x_c = x_a\int B\frac{d\varphi}{dv}\,dv + \int B\frac{d\psi}{dv}\,dv \text{ (nach (24))}$$

$$= i x_a\sqrt{1+\varphi^2} + i\int\frac{\varphi\frac{d\psi}{dv}}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,dv.$$

Wenn demnach für eine Fläche unserer Art

$$E \equiv F \equiv 0,$$

so sind ihre Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_a\,(u, v)\,,\quad x_b = x_a \cdot \varphi(v) + \psi(v)\,,\\ x_c &= i \cdot x_a \cdot \sqrt{1+\varphi^2} + i \int \frac{\varphi \frac{d\psi}{dv}}{\sqrt{1+\varphi^2}}\, dv. \end{aligned}\right\} \qquad \text{IV.}$$

Für $\varphi \equiv 0$ ergibt sich die Minimalebene

$$x_a^2 + x_c^2 = 0$$

und für $\varphi(v) = a = \text{const.}$ die Fläche

$$\frac{(x_a + a\,x_b)^2}{1+a^2} + x_c^2 = 0.$$

Sieht man wieder von diesen speziellen Fällen ab, so kann man ψ als Funktion von φ auffassen und erhält durch Einführung einer beliebigen Funktion von u und v an Stelle von v die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_a(u, v)\,,\quad x_b = x_a \cdot \varphi(u, v) + \psi(\varphi)\,,\\ x_c &= i\,x_a \sqrt{1+\varphi^2} + i \int \frac{\varphi \frac{d\psi}{d\varphi}}{\sqrt{1+\varphi^2}}\, d\varphi\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{IV}^*$$

In den Gleichungen IV sind die Kurven $v = \text{const}$ die Minimallinien, somit stellen die Gleichungen IV* allgemein die Flächen, für welche $EG - F^2 \equiv 0$ ist, dar, dieselbe auf ein beliebiges System von Parameterkurven bezogen.

(Für $\psi = 0$, $\psi = a$ und $\psi = a \cdot \varphi$ ergibt sich stets dieselbe Fläche, nämlich $x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 = 0$, bezw. $x_a^2 + (x_b - a)^2 + x_c^2 = 0$, bezw. $(x_a + a)^2 + x_b^2 + x_c^2 = 0$.)

§ 7.

Abhängigkeit der Größen E, F, G, D, D′, D″ voneinander.

Wenn für eine Fläche $EG - F^2$ von Null verschieden ist, so genügen die sechs Fundamentalgrößen der Gaußschen und der Codazzischen Gleichungen, ist dagegen $EG - F^2$ identisch Null, so werden die Ausdrücke für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeutungslos (da ihr Nenner $\sqrt{EG - F^2}$), und

die Größen D, D′, D″ sind bis auf ihre Vorzeichen durch E, F, G bestimmt. Es ist nämlich

$$D^2 = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2, & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}$$

und für

$$EG - F^2 \equiv 0$$

$$D^2 = F\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial v} - E\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + E\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{4}E\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{4}G\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2.$$

Setzt man hierin

$$F = \sqrt{EG},\quad \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} + G\frac{\partial E}{\partial u}}{2\sqrt{EG}},$$

so ergibt sich

$$D^2 = -\frac{1}{4}\frac{E}{G}\left(\sqrt{E}\,\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{G}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right).$$

Entsprechend erhält man:

$$D'^2 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{E}\,\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{G}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right),$$

$$D''^2 = -\frac{1}{4}\frac{G}{E}\left(\sqrt{E}\,\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{G}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right).$$

Die Fläche ist durch E, F, G, D, D′, D″ nicht mehr bestimmt; man findet dies leicht aus dem Folgenden: die Fläche sei bezogen auf die Schar von Haupttangentenkurven $v = \text{const.}$ und eine beliebige Schar anderer Kurven, dann sind ihre Gleichungen (IV S. 28)

$$\left.\begin{aligned} x_a &= x_a(u, v),\quad x_b = x_a \cdot \varphi(v) + \psi(v), \\ x_c &= i x_a \sqrt{1+\varphi^2} + i\int \frac{\varphi\frac{d\psi}{dv}}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,dv, \end{aligned}\right\}$$

und es ist

$$E \equiv F \equiv D \equiv D' \equiv 0\,,$$

$$G = \frac{\left(x_a \frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\psi}{dv}\right)^2}{1+\varphi^2}\,,$$

$$D''^2 = \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} & & \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial G}{\partial v} & F & G \end{vmatrix},$$

$$= -\frac{1}{4} G \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2,$$

es müßte also jetzt die Fläche durch G allein bestimmt sein. Sei nun

$$G = \frac{\left(x_a \frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\psi}{dv}\right)^2}{1+\varphi^2} = f(u, v)\,,$$

so kann man φ und ψ willkürlich als Funktionen von v wählen und erhält

$$x_a = \frac{\sqrt{(1+\varphi^2) f(u, v)} - \frac{d\psi}{dv}}{\frac{d\varphi}{dv}}\,.$$

Dabei bleiben die Gleichungen IV stets

$$x_b = x_a \cdot \varphi + \psi\,,\; x_c = i x_a \sqrt{1+\varphi^2} + i \int \frac{\varphi \frac{d\psi}{dv}}{\sqrt{1+\varphi^2}}\, dv\,.$$

es müßten demnach alle diese Flächen, wenn sie durch G allein bestimmt sein sollten, identisch sein. Es ist aber leicht, zwei verschiedene Flächen anzugeben. Z. B. erhält man für $\varphi \equiv 0$ bezw. $\psi \equiv 0$ die Minimalebene

$$x_a^2 + x_c^2 = 0$$

und die Fläche

$$x_a^2 + x_b^2 + x_c^2 = 0\,.$$

Dieselben sind voneinander verschieden, da es keine orthogonale Substitution gibt, durch welche die Gleichung der einen in die der andern übergeht.

§ 8.

Die Flächen, für welche $EG - F^2 \equiv 0$.

Wenn die Richtungskoeffizienten einer Geraden oder einer Ebene proportional den Größen a, b, c sind, und es ist

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0,$$

so ist die Gerade Minimalgerade bezw. die Ebene Minimalebene.

Nun sind die Richtungskosinus der Normalen einer Fläche und damit zugleich diejenigen der Tangentialebene proportional den Größen

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial x_b}{\partial u} & \frac{\partial x_c}{\partial u}\\ \frac{\partial x_b}{\partial v} & \frac{\partial x_c}{\partial v}\end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix}\frac{\partial x_c}{\partial u} & \frac{\partial x_a}{\partial u}\\ \frac{\partial x_c}{\partial v} & \frac{\partial x_a}{\partial v}\end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix}\frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u}\\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v}\end{matrix}\right|,$$

und die Summe der Quadrate derselben ist

$$\left|\begin{matrix}\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial x_a}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial v} + \frac{\partial x_b}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial v} + \frac{\partial x_c}{\partial u}\frac{\partial x_c}{\partial v}\\ \frac{\partial x_a}{\partial u}\frac{\partial x_a}{\partial v} + \frac{\partial x_b}{\partial u}\frac{\partial x_b}{\partial v} + \frac{\partial x_c}{\partial u}\frac{\partial x_c}{\partial v} & \left(\frac{\partial x_a}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial v}\right)^2\end{matrix}\right| = EG - F^2.$$

Daher ist für die Fläche, für welche

$$EG - F^2 \equiv 0,$$

die Normale Minimalgerade und die Tangentialebene Minimalebene. Das Flächenelemnnt $(\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv)$ ist Null.

Die Minimallinien auf der Fläche seien die Parameterkurven $v = \text{const.}$, dann sind ihre Richtungskoeffizienten

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}.$$

Multipliziert man dieselben mit den entsprechenden Richtungskoeffizienten der Flächennormale, so ist die Summe der Produkte

$$\frac{\partial x_a}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_b}{\partial u} & \frac{\partial x_c}{\partial u} \\ \frac{\partial x_b}{\partial v} & \frac{\partial x_c}{\partial v} \end{vmatrix} + \frac{\partial x_b}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial u} & \frac{\partial x_a}{\partial u} \\ \frac{\partial x_c}{\partial v} & \frac{\partial x_a}{\partial v} \end{vmatrix} + \frac{\partial x_c}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix}$$

identisch Null, d. h. die Flächennormalen fallen mit den Minimallinien auf der Fläche zusammen.

Bezieht man die Fläche auf ein beliebiges System von Parameterkurven, so ist der Winkel zwischen denselben definiert durch

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

da aber $F = \pm\sqrt{EG}$, so ist $\cos\omega = \pm 1$, $\omega = 0$ bezw. 180^0, d. h. alle Flächenkurven, die nicht Minimallinien sind, schneiden sich unter dem Winkel Null.

Von Krümmungslinien kann man nicht mehr sprechen, da es unendlich viele Transformationen gibt, durch welche F Null wird und das Verschwinden von F stets dasjenige von D′ nach sich zieht. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0$$

wird zur Identität.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien ist nur erfüllt für die Minimallinien.

Auch kann es keine Kurve geben, für welche in jedem Punkte die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt. Denn eine solche Kurve müßte, da die Normale der Fläche Minimallinie ist, eine krumme Linie in einer Minimalebene sein, denn nur für diese ist, wenn man von den Minimallinien selbst absieht, die Hauptnormale Minimalgerade. Die Gleichungen einer solchen Kurve sind aber

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = A\,x_1 + i\sqrt{1 + A^2}\,x_2 + \text{const},$$

daraus ergeben sich als Richtungskoeffizienten der Hauptnormalen die Konstanten

$$A, i\sqrt{1+A^2}, -1 .$$

Für die Richtungskoeffizienten der Normalen unserer Fläche erhält man

$$A = \frac{i}{\sqrt{1+\varphi^2(v)}}, \quad B = \frac{i\varphi(v)}{\sqrt{1+\varphi^2(v)}}, \quad -1 ,$$

dieselben sind also nur konstant längs den Minimallinien auf der Fläche.

Nennt man zwei Flächen aufeinander abwickelbar, wenn ihre ersten Grundformen

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

und

$$E_1\,du^2, + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1{}^2$$

ineinander transformierbar sind, so sind alle Flächen, für welche $EG - F^2 \equiv 0$ ist, aufeinander abwickelbar, denn sei

$$E \equiv F \equiv 0 ,$$

so bleiben diese Identitäten bestehen, wenn man an Stelle von u eine beliebige Funktion von u und v setzt, denn die Fläche bleibt dabei auf die Minimallinien $v = \text{const}$ als eine Schar von Parameterkurven bezogen. Nach S. 30 ist aber

$$G = \frac{\left(x_a \frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\psi}{dv}\right)^2}{1+\varphi^2} ,$$

man kann also durch Einführung einer entsprechenden Funktion von u und v an Stelle von v G gleich einer willkürlichen Funktion f(u, v) werden lassen.

Anhang: Die Mongeschen Gleichungen der Minimalflächen.

Wir hatten gefunden, daß, wenn $EG - F^2$ identisch Null ist, das Verschwinden von E stets dasjenige von F, D und D′ nach sich zieht. Wenn dagegen $EG - F^2$ von Null verschieden

ist, so kann man mit E zugleich stets G, D′ oder D″ Null werden lassen, aber niemals F und nur für eine besondere Klasse von Flächen D. Für dieselben sind die Minimallinien der einen Schar (v = const) zugleich Haupttangentenkurven. Die Ausdrücke für Gesamt- und mittlere Krümmung werden für

$$E \equiv D \equiv 0:$$

$$K = \frac{-D'^2}{F^4}, \quad M = \frac{-2D'}{F^2},$$

daher ist, wenn man die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 nennt,

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

Die Gleichungen dieser Flächen lassen sich leicht aufstellen. Es ist

$$D^2 = \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}$$

und für $E \equiv 0$

$$D^2 = -F^2 \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2.$$

Aus

$$E \equiv \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0$$

folgt

$$\frac{\partial x_c}{\partial u} = i\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 x_c}{\partial u^2} = i\frac{\frac{\partial x_a}{\partial u}\frac{\partial^2 x_a}{\partial u^2} + \frac{\partial x_b}{\partial u}\frac{\partial^2 x_b}{\partial u^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}}$$

und aus

$$D \equiv 0$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2 \equiv 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 x_c}{\partial u^2} = i \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x_a}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_b}{\partial u}\right)^2} .$$

Durch Vergleichen der beiden Werte von $\frac{\partial^2 x_c}{\partial u^2}$ erhält man

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_a}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_b}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \end{vmatrix} \equiv 0 ,$$

also

$$\frac{\partial^2 x_a}{\partial u^2} : \frac{\partial x_a}{\partial u} = \frac{\partial^2 x_b}{\partial u^2} : \frac{\partial x_b}{\partial u} ,$$

$$x_b = x_a \cdot \varphi(v) + \psi(v) ,$$

wobei φ und ψ willkürliche Funktionen von v allein sind. Es ergibt sich dann ohne weiteres

$$\frac{\partial x_c}{\partial u} = i \frac{\partial x_a}{\partial u} \sqrt{1 + \varphi^2} ,$$

$$x_c = i x_a \sqrt{1 + \varphi^2} + \chi(v) .$$

Mit F zusammen kann man stets D (bezw. D″) oder D′ Null werden lassen; im ersten Falle bezieht man die Fläche auf eine Schar von Haupttangentenkurven und ihre Orthogonaltrajektorien, im andern auf die Krümmungslinien.

Von Bedeutung sind diejenigen Flächen, für welche mit F und D auch D″ oder, was dasselbe ist, mit E und G auch D′ verschwindet. Die mittlere Krümmung dieser Flächen ist Null, es sind also die sogen. Minimalflächen. Ihre Gleichungen ergeben sich leicht auf folgende Weise. Es ist:

$$D'^2 = \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix},$$

somit für

$$E \equiv G \equiv 0$$

$$D'^2 = -F^2 \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2.$$

Aus $E \equiv G \equiv 0$ folgt

$$\frac{\partial x_c}{\partial u} = i\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}, \quad \frac{\partial x_c}{\partial v} = i\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial v}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 x_c}{\partial u \partial v} = i\frac{\frac{\partial x_a}{\partial u}\frac{\partial^2 x_a}{\partial u \partial v} + \frac{\partial x_b}{\partial u}\frac{\partial^2 x_b}{\partial u \partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial u}\right)^2}} = i\frac{\frac{\partial x_a}{\partial v}\frac{\partial^2 x_a}{\partial u \partial v} + \frac{\partial x_b}{\partial v}\frac{\partial^2 x_b}{\partial u \partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_a}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_b}{\partial v}\right)^2}}.$$

Setzt man diese beiden Werte von $\frac{\partial^2 x_c}{\partial u \partial v}$ gleich dem aus

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 \equiv 0$$

sich ergebenden

$$\frac{\partial^2 x_c}{\partial u \partial v} = i\sqrt{\left(\frac{\partial^2 x_a}{\partial u \partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_b}{\partial u \partial v}\right)^2},$$

so erhält man

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_a}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x_b}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_a}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x_b}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

also, da wir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_a}{\partial u} & \frac{\partial x_b}{\partial u} \\ \frac{\partial x_a}{\partial v} & \frac{\partial x_b}{\partial v} \end{vmatrix}$$

als von Null verschieden voraussetzen,

$$\frac{\partial^2 x_a}{\partial u \partial v} \equiv \frac{\partial^2 x_b}{\partial u \partial v} \equiv 0 .$$

Wenn wir demnach mit $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ Funktionen von u, mit $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$ solche von v allein bezeichnen, so ist

$$x_a = \varphi_1(u) + \psi_1(v) , \quad x_b = \varphi_2(u) + \psi_2(v) ,$$

$$x_c = i\int \sqrt{\left(\frac{d\varphi_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{du}\right)^2}\, du + i\int \sqrt{\left(\frac{d\psi_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\psi_2}{dv}\right)^2}\, dv .$$

Diese Gleichungen wurden zuerst von Monge aufgestellt.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

Lebenslauf.

Ich, Fritz Engel, wurde geboren am 25. September 1886 zu Oberstein im Fürstentum Birkenfeld als Sohn des Schmiedemeisters Karl Engel und seiner Ehefrau Karoline geb. Köhler. Ich besuchte die Oberrealschule zu Düsseldorf und studierte an den Universitäten Halle und Straßburg i. E. Mathematik und Physik. Zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Geh. Rat Prof. Dr. Schur in Straßburg für die Ratschläge, die er mir bei der Ausarbeitung meiner Dissertation gegeben hat.